Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIX**, 12.

EINLEITUNG IN DIE ALLGEMEINE KONGRUENZLEHRE

VON

JOHANNES HJELMSLEV

DRITTE MITTEILUNG

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD
1942

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S

I. Einleitung.

1. Die allgemeine Kongruenzlehre, wie wir sie auffassen und über welche wir früher zwei Mitteilungen[1] veröffentlicht haben, wurde auf das folgende Axiomsystem gegründet.

I. Es gibt Punkte. Es gibt Punktmengen, welche gerade Linien (Geraden) heissen. Es gibt Transformationen, welche Bewegungen heissen. Jede Bewegung ist eine Zuordnung, durch welche jeder Geraden und jedem auf ihr gelegenen Punkte eine Gerade und ein auf ihr gelegener Punkt umkehrbar eindeutig entspricht. Die Umkehrung einer Bewegung ist auch eine Bewegung. Die Bewegungen bilden eine Gruppe. Zwei Figuren, die durch eine Bewegung auseinander abgeleitet werden können, sollen kongruent heissen.

II. Ausser der Identität gibt es eine und nur eine Bewegung, welche alle Punkte einer geraden Linie fest lässt. Diese Bewegung heisst Spiegelung an der geraden Linie. Die Linie wird als Achse der Spiegelung bezeichnet. Jede Gerade ist die Achse einer Spiegelung. Jeder Punkt ausserhalb der Achse geht bei der Spiegelung in einen von ihm verschiedenen Punkt über.

III. Eine Gerade b heisst senkrecht zu einer von ihr verschiedenen Geraden a (in Zeichen $b \perp a$), wenn b bei

[1] Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre, Erste Mitteilung. D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Math.-fys. Medd. VIII, 11, 1929; Zweite Mitteilung, ibd. X, 1, 1929.

der Spiegelung an a in sich selbst übergeht. Durch jeden Punkt geht eine und nur eine Gerade b, die senkrecht zu einer gegebenen Geraden a ist; die beiden Geraden haben stets einen und nur einen Punkt gemein.

IV. Wenn zwei Punkte A und B einer geraden Linie l angehören, haben sie immer eine Spiegelungsachse m, derart dass A und B bei der Spiegelung an m miteinander vertauscht werden, während l in sich selbst übergeführt wird ($l \perp m$). Diese Spiegelungsachse schneidet l in einem Punkt M, welcher als Mittelpunkt von A und B (oder von AB) auf l bezeichnet wird.

V. Zwei kongruente Punktreihen $ABC \ldots$ und $AB'C' \ldots$ auf einer oder auf zwei Geraden, mit dem gemeinsamen Punkt A können immer durch eine Spiegelung ineinander übergeführt werden.

In unserem Axiomsystem ist nicht ausdrücklich die Forderung aufgestellt, dass jeder Punkt durch Bewegung in jeden anderen Punkt übergehen kann. Es zeigt sich aber, dass diese Eigenschaft im Axiomsystem implizite enthalten ist. Durch zwei beliebige Punkte A, B können nämlich zwei zueinander senkrechte Geraden gelegt werden, und diese Geraden schneiden einander in einem Punkt C. Nach IV gibt es dann eine Spiegelung, welche A in C überführt, und eine Spiegelung, welche C in B überführt, somit auch eine Bewegung, welche A in B überführt.

2. Für die geraden Linien hingegen ist die entsprechende Eigenschaft keine Folge des Axiomsystems, was schon durch das einfache Beispiel, wo die Geometrie als die Cartesische Ebene mit ihren rationalen Punkten und Geraden definiert ist und die Bewegungen die rationalen orthogonalen Substitutionen sind, dargetan wird.

Bei dieser allgemeinen Fassung des Axiomsystems hat sich aber eine Schwierigkeit herausgestellt, welche mir bei den früheren Erwägungen entgangen war. In der ersten Mitteilung ist nämlich ohne Beweis behauptet worden, dass drei Geraden r, s, t durch denselben Punkt hindurchgehen müssen, wenn zwei von ihnen einen eindeutigen Schnittpunkt haben und ausserdem die Bewegung rst involutorisch ist. Es scheint aber zweifelhaft, ob dieser Satz aus den aufgestellten Axiomen I—V allein ableitbar ist. Setzt man voraus, was wir tatsächlich im folgenden tun wollen, dass alle Geraden kongruent sind, so ist der Satz sofort beweisbar. Wir bemerken aber, dass das folgende weniger aussagende Axiom VI genügen wird:

VI. Es gibt zwei zueinander senkrechte kongruente Geraden,

d. h. es gibt zwei zueinander senkrechte Geraden a, b, derart dass die eine, a, durch eine Bewegung in die andere, b, übergeführt werden kann. Geht hierbei der Schnittpunkt O der beiden Geraden als Punkt von a in den Punkt P von b über, so existiert eine Spiegelungsachse $p \perp b$ der beiden Punkte O, P, und es gibt somit auf a und b zwei kongruente Punktreihen mit gemeinsamem Punkt O, d. h. a und b haben eine Spiegelungsachse.

Es zeigt sich nun zunächst, dass unser neues Axiom VI die folgende weitergehende Eigenschaft nach sich zieht:

Je zwei zueinander senkrechte Geraden haben eine Spiegelungsachse.

Beweis. Wir wissen schon, dass die beiden gegebenen, zueinander senkrechten Geraden a, b mit dem Schnittpunkt O, eine Spiegelungsachse m haben. Durch O ziehen wir nun zwei beliebige andere zueinander senkrechte Geraden c, d. Es soll dann bewiesen werden, dass auch c, d

eine Spiegelungsachse haben. Wir bestimmen eine Gerade x durch die Gleichung

$$am = cx;$$

aus $ab = cd$ folgt nun (wegen $a \perp b$, $c \perp d$)

$$(am)(mb) = (cx)(xd),$$

oder, weil $am = mb = cx$ ist,

$$cx = xd,$$

d. h. x ist Spiegelungsachse von c, d; und hiermit haben wir den Beweis erbracht.

Da nun ferner der Punkt O durch Bewegung in jeden beliebigen Punkt übergeführt werden kann, folgt sofort, dass je zwei zueinander senkrechte Geraden eine Spiegelungsachse haben, w. z. b. w.

Und nun schreiten wir zum Beweis des angekündigten Satzes:

Wenn 3 Geraden a, b, c eine involutorische Bewegung abc darstellen, und wenn zwei von ihnen, a, b, einen eindeutigen Schnittpunkt O haben, dann geht die dritte Gerade notwendig durch O.

Das Spiegelbild P von O in c geht bei der Bewegung $abc = cba$ in O über; hieraus folgt aber, dass P bei der Bewegung $abcc = ab$ fest bleiben muss. Die Bewegung ab lässt sich somit durch zwei Spiegelungen x, y, $x \perp a$ durch P, y durch P, ersetzen; aus $ab = xy$ folgt aber

$$by = ax,$$

und da $x \perp a$ ist, ist also auch $y \perp b$, und der Schnittpunkt von b, y muss mit dem Schnittpunkt von a, x zusammenfallen, das heisst, er fällt in O. Die beiden Geraden

x, y gehen also durch O und sind also die Lote der beiden Geraden a, b in O.

Ist nun m Spiegelungsachse der beiden zueinander senkrechten Geraden a und x, so führt die Bewegung am die Gerade a in x über; sie führt aber auch die Gerade b in y über, d. h. a und b werden durch die Bewegung am in x und y übergeführt. Da a und b nur einen Punkt O gemein haben, gilt dies auch von x und y d. h. $P = O$, oder P ist in c enthalten.

3. Das Axiomsystem enthält keine Axiome über die Bestimmung der geraden Linie durch zwei Punkte, und die Möglichkeit wurde nicht ausgeschlossen, dass zwei Punkte in gewissen Fällen keine Verbindungsgerade haben. Wir haben z. B. den Beweis erbracht, dass die beiden Punkte auch in diesen Fällen in dem Sinne einen Mittelpunkt haben, dass die beiden Punkte durch eine Umwendung um diesen Punkt ineinander übergehen. Ferner können wir gewissen Dreieckssätzen eine solche Formulierung geben, dass auch diejenigen Fälle in Betracht gezogen werden, wo die drei Ecken A, B, C nicht notwendig Verbindungsgeraden haben. Wenn z. B. A und B wenigstens eine Verbindungsgerade haben, während es offen bleibt, wie sich die Paare BC, CA, bezüglich der Existenz von Verbindungsgeraden verhalten, kann man von der Mittelsenkrechten p von AB und von den Mittelpunkten M von BC, N von CA, reden; p ist ein- oder mehrdeutig bestimmt, je nachdem die Gerade AB ein- oder mehrdeutig bestimmt ist; M und N sind immer eindeutig bestimmt. Es gilt dann der Satz, dass eine Gerade g existiert, welche durch M und N hindurchgeht und auf p senkrecht steht. Ist AB mehrdeutig, so wird $MN = q$ auch mehrdeutig, und die beiden Geraden entsprechen ein-

ander derart, dass sie stets eine (veränderliche) gemeinsame Normale p durch den festen Mittelpunkt von AB haben.

4. Im folgenden sollen aber nun unsere Untersuchungen stets auf reelle Geometrien beschränkt werden, d. h. auf solche Geometrien, wo je zwei Punkte wenigstens eine Verbindungsgerade haben; ferner sollen die elementaren Gesetze der Anordnung für die Punkte einer geraden Linie Gültigkeit haben; und endlich setzen wir auch die gewöhnlichen Regeln über die Teilung der Ebene durch jede ihrer Geraden in zwei Halbebenen voraus. Es folgt dann (vgl. Erste Mitteilung S. 17), dass zwei Geraden, welche zwei Punkte A, B gemein haben, beide die ganze Strecke AB enthalten müssen.

Schliesslich wollen wir bei den folgenden Untersuchungen auch stets voraussetzen, dass alle Geraden kongruent sind, dass also durch Bewegungen nicht nur jeder Punkt in jeden anderen, sondern auch jede Gerade in jede andere übergeführt werden kann.

II. Nachbarpunkte und Nachbargeraden.

5. Eine Strecke AB soll ordinär heissen, wenn die Gerade AB eindeutig ist, dagegen singulär, wenn dies nicht der Fall ist.

Zwei verschiedene, von einem Punkt O ausgehende Halbstrahlen a und b bilden einen Winkel mit dem Scheitel O. Wir setzen hier voraus, dass die Halbstrahlen zwei verschiedenen Geraden angehören; diese Geraden sind durch die Halbstrahlen a, b eindeutig bestimmt; durch Umwendung um O werden nämlich die Halbstrahlen a, b in die entgegengesetzten Halbstrahlen übergeführt. Wenn die beiden Halbstrahlen a, b zwei mehrdeutig schneidenden Geraden angehören, soll der Winkel singulär heissen, spitz, wenn a und b mehrere Punkte, und dann auch Strecken gemein haben, und rund, wenn a und b nur den Punkt O gemein haben. Andere Winkel heissen ordinär. Ein runder singulärer Winkel ist Nebenwinkel eines spitzen singulären Winkels.

6. Ein singulärer spitzer Winkel kann in sich selbst verschoben werden. Ist O_1 ein von O verschiedener gemeinsamer Punkt von a und b, und ist M der Mittelpunkt von OO_1, dann wird der Winkel durch die Schiebung OM[1] $= MO_1$ derart in sich selbst verschoben, dass der Scheitel O in O_1 übergeht. Alle singulären Winkel, deren Schenkel in den Schenkeln eines anderen singulären (spitzen) Winkels enthalten sind, sind also diesem Winkel kongruent (und unter einander kongruent). Auch ein runder Winkel kann in ähnlicher Weise in sich selbst verschoben werden.

7. Als Scheitelelement eines singulären Winkels bezeichnen wir die Menge aller gemeinsamen Punkte der beiden durch die Schenkel des Winkels bestimmten Geraden. Dasselbe Element soll auch das Schnittelement der beiden Geraden genannt werden. Das Schnittelement ist ein konvexer Bereich d. h. je zwei Punkte der Menge sind die Endpunkte einer Strecke, deren Punkte alle der Menge angehören. Kongruente singuläre Winkel haben kongruente Schnittelemente.

8. Wenn zwei singuläre spitze Winkel nicht kongruent sind, so spricht man von einem grösseren und einem kleineren Winkel in dem Sinne, dass der kleinere Winkel in den grösseren so hineingelegt werden kann, dass die beiden Winkel einen Schenkel gemein haben. Man sieht dann,

[1] Das ist die Schiebung, welche aus den Umwendungen O und M zusammengesetzt ist

dass der kleinere Winkel entweder dasselbe oder ein grösseres Scheitelelement als der grössere Winkel hat.

9. Drei Punkte A, B, C, welche nicht in derselben Geraden enthalten sind, bestimmen ein Dreieck ABC mit den Seiten BC, CA, AB, wobei wir nur an die Strecken denken. Die Winkel des Dreiecks werden hingegen erst durch gerade Linien festgelegt, welche je zwei der Punkte verbinden: eine Gerade a durch B und C, eine Gerade b durch C und A, und eine Gerade c durch A und B. Sind diese Geraden alle eindeutig bestimmt (die Seiten sollen dann als ordinär bezeichnet werden), so sind auch die Winkel eindeutig bestimmt: z. B. $\angle A$ durch die Halbstrahlen von A durch B und von A durch C. Wenn aber die Verbindungsgeraden der Ecken mehrdeutig sind, werden auch die Winkel mehrdeutig. Die Summe der Winkel ist aber hiervon unabhängig. Wenn wir uns nämlich vergegenwärtigen, welche Veränderung es bewirkt, wenn eine Seitengerade a durch eine andere a_1 ersetzt wird, so ergibt sich, dass die durch die Seitengeraden a, b, c festgelegten Winkel

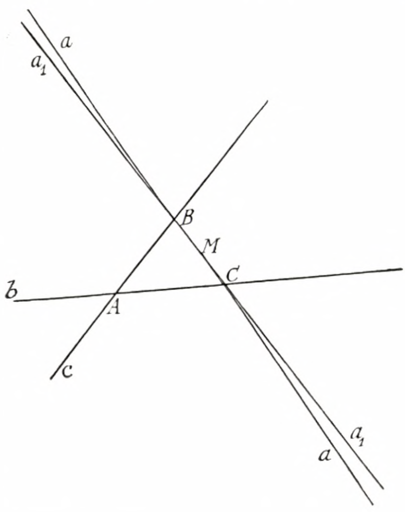

Fig. 1.

$$\beta = CBA, \ \gamma = ACB$$

und die durch die Seitengeraden a_1, b, c festgelegten Winkel

$$\beta_1 = CBA, \ \gamma_1 = ACB,$$

dieselbe Summe haben.

In der Tat ist

$$\beta_1 = \beta + x, \ \gamma_1 = \gamma - x_1,$$

wo x den von den beiden Halbstrahlen von B durch C längs a bzw. a_1 gebildeten Winkel und x_1 den von den Halbstrahlen von C durch B längs a bzw. a_1 gebildeten Winkel bedeuten. Diese Winkel x und x_1 sind aber untereinander gleich; denn sie gehen bei der Umwendung um den Mittelpunkt M von BC ineinander über.

Es ist also

$$\beta_1 + \gamma_1 = \beta + \gamma,$$

d. h.

Die Winkelsumme im Dreieck ist bei mehrdeutigen Seitengeraden von der Wahl dieser Geraden unabhängig und hängt also nur von den Ecken des Dreiecks ab.

Entsprechendes ergibt sich für die Winkelsumme eines beliebigen Polygons.

10. In jedem Dreieck mit einem rechten Winkel sind die beiden anderen Winkel spitz.

Es sei ABC (Fig. 2) ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel $C = (ab)$. In A errichten wir die Normale a_1 auf b. Die beiden Geraden a, a_1 begrenzen einen Streifen, welcher die ganze Strecke AB enthält. Hieraus folgt aber, dass der Winkel bei A spitz ist. Ebenso ergibt sich dies für den Winkel bei B.

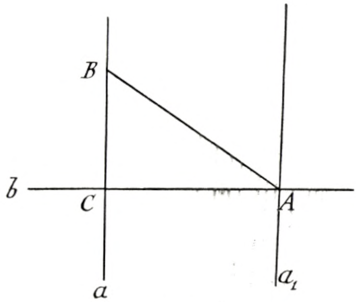

Fig. 2.

11. In einem rechtwinkligen Dreieck können nicht beide spitzen Winkel singulär sein.

Anderenfalls könnte man (Fig. 3) von den Ecken A, B aus zwei gleich grosse Strecken AA_1 und B_1B auf der Hypotenuse AB derart abgrenzen, dass die eine Strecke AA_1 zugleich in der Kathete AC, die andere BB_1 zugleich in der Kathete BC enthalten ist. Die Bewegung $AA_1 = B_1B$ würde dann beide Kathetenlinien a und b in sich überführen, also den Punkt C fest lassen, was unmöglich ist.

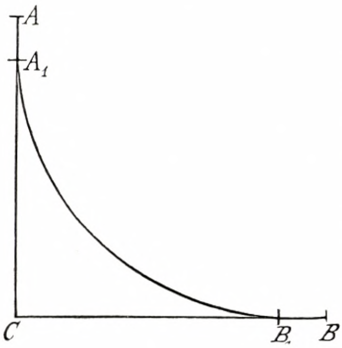

Fig. 3.

12. Wie sofort ersichtlich, lässt sich der Satz zu dem folgenden erweitern:

In jedem Dreieck ABC mit einem ordinären Winkel A (wo also die Seitengeraden AB und AC nur einen Punkt A gemein haben), können die anderen Winkel niemals beide singulär sein.

13. Zwei Halbstrahlen a_1 und b_1 (Fig. 4), die von zwei Punkten A bzw. B einer Geraden g nach derselben Seite dieser Geraden ausgehen und mit der Strecke AB singuläre spitze Winkel bilden, müssen sich schneiden. Fällt

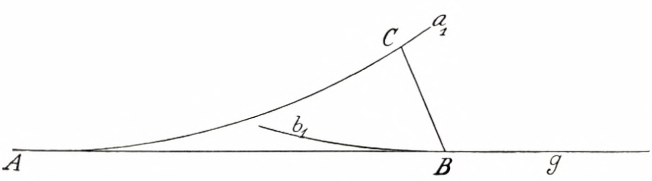

Fig. 4.

man nämlich von B die Senkrechte BC auf a_1, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck ACB, dessen Winkel A singulär ist, und dessen anderer Winkel B somit ordinär ausfallen muss. Hieraus folgt aber, dass der Halbstrahl b_1, welcher mit BA einen singulären spitzen Winkel bildet, in den Winkel ABC eindringt; er muss daher die Seite AC schneiden oder durch A hindurchgehen.

14. Zwei Punkte A, B sollen als Nachbarpunkte (oder als benachbart) bezeichnet werden, wenn sie mehr als eine, also unendlich viele Verbindungsgeraden haben. Die Strecke AB ist dann singulär. Zieht man durch A, B zwei Geraden a, b, welche einander eindeutig schneiden (z. B. zwei zueinander senkrechte Geraden), so ist ihr Schnittpunkt C zu A und B benachbart. Sind nämlich p und q zwei sowohl durch A als auch durch B hindurchgehende Geraden, so lässt sich die Bewegung pq durch ax ersetzen, wo x durch A geht, oder durch by, wo y durch B geht. Es ist dann $ax = by$, also $bax = y$ involutorisch, und da a, b einen eindeutigen Schnittpunkt C haben, muss x durch diesen Punkt gehen, d. h. A und C haben mehrere Verbindungsgeraden. Aus C und A (oder B) lassen sich dann neue Nachbarpunkte ableiten. Wir wissen auch, dass die Mittelpunkte der Strecken AB, AC, u. s. w. Nachbarpunkte von A sind, ebenso die Punkte A^B, A^C, u. s. w. (Erste Mitteilung, S. 17).

Bemerkung. Es könnte natürlich vorkommen, dass alle Punkte unserer Ebene benachbart sind, d. h. dass je zwei Punkte unendlich viele Verbindungslinien haben, also dass alle Strecken singulär sind. Dieser Fall soll bis auf weiteres ausgeschlossen werden. Im folgenden soll also stets vorausgesetzt werden, dass wenigstens ein Punktepaar (und dann unendlich viele) existiert, dessen Verbindungslinie eindeutig ist.

15. Wir wollen nun alle Nachbarpunkte von A zu einer Menge (A) zusammenfassen. Wir bezeichnen A als Mittel-

punkt der Menge, werden aber sofort zeigen, dass jeder Punkt der Menge als ihr Mittelpunkt betrachtet werden kann, indem wir den folgenden Satz beweisen:

Zwei Nachbarpunkte B, C eines Punktes A sind auch Nachbarpunkte voneinander.

Der Beweis verläuft in folgender Weise:

Fall 1. A, B liegen auf einer Geraden g, AC auf einer anderen Geraden $h \perp g$, oder allgemeiner: g und h haben einen eindeutigen Schnittpunkt.

Durch B und C ziehen wir eine Gerade l; sie schneidet jedenfalls eine der beiden Geraden g, h eindeutig. Und hieraus folgt (14), dass B und C Nachbarpunkte sind. Also:

Wenn zwei Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks singulär sind, so auch die Hypotenuse.

Fall 2. A, B, C liegen alle auf einer Geraden g. Wir errichten in A ein Lot h und tragen auf ihm mittels einer Spiegelung an einer Spiegelungsachse der beiden Geraden g, h die Strecke $AD = AB$ ab. Wir ziehen die Gerade l durch B und D senkrecht zu dieser Spiegelungsachse. Die Winkel bei B und D im Dreieck BAD müssen dann beide ordinär ausfallen, weil sie nicht beide singulär sind. Nach Fall 1 sind nun D und C Nachbarpunkte, und da die beiden Geraden l und g einander eindeutig schneiden, folgt aus 14, dass B und C benachbart sind.

Wenn zwei Strecken singulär sind, so ist auch ihre Summe und ihre Differenz singulär.

Fall 3. Dieser Fall ist der Hauptfall: A, B, C sind 3 beliebige Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen.

Wir ziehen eine Gerade g durch B und C und fällen das Lot AA_1 auf g. Da nun A und B benachbart sind, gilt dies auch von A_1 und B. Ebenso: A und C sind benachbart, daher auch A_1 und C. Da nun A_1 zu B und C benachbart ist, und diese 3 Punkte auf einer Geraden liegen, folgt (Fall 2), dass B und C untereinander benachbart sind.

Hiermit ist unser Beweis vollständig erledigt.

16. Ein Nachbargebiet A mit Mittelpunkt A wird nun nach diesem Satz durch irgend einen seiner Punkte bestimmt. Wenn zwei Nachbargebiete einen Punkt gemein haben, müssen sie identisch sein.

Das Nachbargebiet ist ein konvexer Bereich, hat aber keine Grenzpunkte.

Es lässt sich leicht bestätigen, dass im Nachbargebiet A eine Geometrie gilt, in welcher dieselben Axiome erfüllt sind wie in unserer ursprünglichen Geometrie. Unter einer Geraden im Gebiet A verstehen wir nur diejenige Teilmenge einer ursprünglichen Geraden, welche dem Gebiet angehört. In naheliegender Weise lassen sich auch andere geometrische Begriffe auf das Gebiet A überführen, und nach den vorstehenden Untersuchungen gelten dann eben alle Axiome unserer Geometrie.

17. Wir wollen nun auch von Nachbargeraden sprechen. Zwei Geraden a, b sollen Nachbargeraden heissen, wenn zu jedem Punkt P der Geraden a ein Nachbarpunkt Q auf der Geraden b existiert. Das Lot PN von P auf b trifft dann diese Gerade stets in einem Nachbarpunkt Q von P.

Zwei Geraden a, b mit mehrdeutigem Schnittpunkt sind notwendig Nachbargeraden.

Die beiden Geraden a, b (Fig. 5) mögen etwa die Punkte A, B gemein haben. Von einem auf a (aber nicht auf b) gelegenen Punkt P fällen wir das Lot c auf b. Der Fusspunkt sei Q. Die Lote auf a und b in A seien n und n_1; ausser A haben sie noch z. B. den Punkt C gemein, welcher durch Abtragen der Strecke $AC = AB$ erhalten wird. Die

Bewegung ab ist mit der Bewegung nn_1 gleichwertig und hat also ausser A (und B) den Fixpunkt C. Wir ziehen nun die Verbindungsgerade $CP = c_1$; sie ist von a verschieden, weil C nicht auf a liegt. Die Bewegung abc_1 ist nun der Bewegung nn_1c_1 gleichwertig und daher involutorisch. Mit Hilfe dieser Tatsache lässt sich dann zeigen, dass die beiden

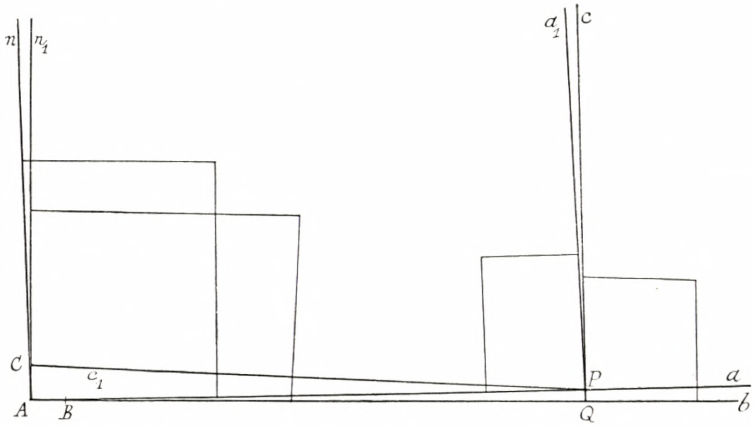

Fig. 5.

Punkte P, Q ausser c noch eine Verbindungslinie haben, nämlich die Achse c' der Spiegelung ac_1c. Hierzu verwenden wir den Satz von den drei Spiegelungen in Involution (Erste Mitteilung S. 24—25): Durch P gehen die Lote c auf b und a_1 auf a. Es gibt dann eine Verbindungslinie PQ senkrecht zu derjenigen Geraden m, welche durch die Gleichung

$$m = a_1c_1c$$

bestimmt wird. Diese Verbindungsgerade PQ ist dann als Spiegelungsachse c' derart bestimmt, dass

$$c' = Pm = Pa_1c_1c = ac_1c,$$

wie oben behauptet wurde.

Dass die Gerade c' von c verschieden ist, folgt einfach daraus, dass a von c_1 verschieden ist. Es hat sich also herausgestellt, dass die Punkte P, Q zwei verschiedene Verbindungslinien haben, d. h. die beiden Geraden a, b sind Nachbargeraden.

In der obigen Untersuchung kann der Punkt C durch irgend einen anderen gemeinsamen Punkt der beiden Geraden n, n_1 ersetzt werden. Wenn C das ganze Schnittelement (n, n_1) durchläuft, beschreibt die Gerade c_1 das projizierende Büschel $P(C)$ aus P, und gleichzeitig beschreibt die Verbindungsgerade c' von P, Q, welche durch die Gleichung

$$c' = ac_1c$$

bestimmt ist, ein entsprechendes Büschel. Da $ac_1 = c'c$, sind die beiden von c_1 und c' beschriebenen Büschel symmetrisch.

18. Zwei Nachbargeraden mit einem gemeinsamen Punkt P, schneiden sich mehrdeutig (in einem Schnittelement um P).

Beweis. PQ sei eine ordinäre Strecke auf der einen Geraden, PR ihre Projektion auf die andere. QR ist dann eine singuläre Strecke, und wenn die beiden Geraden einen eindeutigen Schnittpunkt hätten, würde das bedeuten, dass auch PQ singulär wäre, was nicht der Fall ist.

19. Haben zwei Punkte A, B eine eindeutige Verbindungslinie g, und ist B_1 Nachbarpunkt von B, so haben A und B_1 eine eindeutige Verbindungslinie g_1, welche Nachbargerade von g ist.

Hätten nämlich g und g_1 einen eindeutigen Schnittpunkt in A, während B und B_1 Nachbarpunkte sind, so würde hieraus folgen, dass auch A und B benachbart wären, was nicht zutrifft.

20. Wenn zwei Geraden g, h Nachbargeraden derselben Geraden l sind, dann sind sie auch Nachbargeraden voneinander.

Von einem auf g gelegenen Punkt P fällen wir das Lot PQ auf l und von Q das Lot QR auf h. Da P und R Nachbarpunkte von Q sind, sind sie auch Nachbarpunkte voneinander. Jeder Punkt P von g hat somit einen Nachbarpunkt auf h, w. z. b. w.

21. Wenn zwei Punkte A und B eine eindeutige Verbindungsgerade haben und A_1 und B_1 Nachbarpunkte von A bzw. B sind, so ist die Gerade A_1B_1 Nachbargerade von AB.

Denn AB und A_1B_1 sind beide Nachbargeraden derselben Geraden AB_1.

22. Alle Nachbarpunkte einer Geraden l (d. h. Nachbarpunkte der Punkte von l) bilden ein Nachbargebiet von l. Dieses Nachbargebiet l enthält alle Nachbargeraden von l, und ist durch irgend eine dieser Geraden eindeutig bestimmt.

23. Zwei Lote a, a_1 einer Geraden g, welche in zwei Nachbarpunkten auf g errichtet sind, sind Nachbargeraden voneinander.

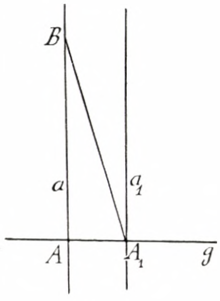

Fig. 6.

Auf a wählen wir einen Punkt B (Fig. 6) derart, dass A und B nicht Nachbarpunkte sind. Die Gerade BA_1 ist dann Nachbargerade von a (19). Sie schneidet a mehrdeutig in B (18), und hieraus folgt weiter[1], dass sie auch a_1 mehrdeutig in A_1 schneidet und somit auch Nachbargerade von a_1 ist. Hieraus folgt dann der Satz.

[1] Erste Mitteilung, S. 18.

24. Wenn zwei Geraden g, h, welche einander nicht schneiden, eine singuläre Verbindungsstrecke PQ haben (also zwei Nachbarpunkte enthalten), sind sie notwendig Nachbargeraden.

Von dem auf g gelegenen Punkt P fällen wir das Lot l auf h (Fig. 7). Sein Fusspunkt sei Q_1. Die Strecke PQ_1 ist ebenfalls singulär. Errichten wir nun in P das Lot n auf l, so wissen wir, dass n und h benachbart sind. Fällt n

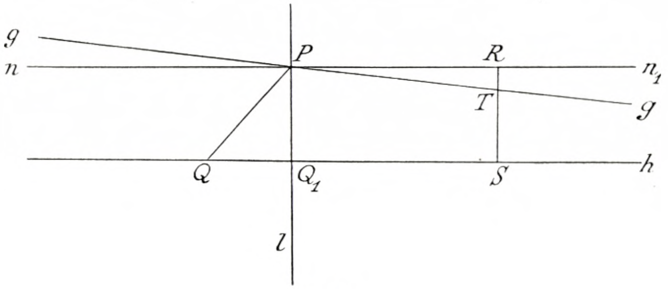

Fig. 7.

mit g zusammen, so ist die Behauptung schon bewiesen. Ist dies aber nicht der Fall, so müssen n und g einander schneiden. Es gibt dann auf g einen Halbstrahl g_1, welcher innerhalb des Streifens nh verläuft. Derjenige Halbstrahl von n, welcher in derselben von l begrenzten Halbebene wie g_1 verläuft, sei mit n_1 bezeichnet. Auf n_1 tragen wir einen ordinären Abstand PR ab und fällen von R das Lot RS auf h. Die Strecke RS muss dann g_1 schneiden; der Schnittpunkt sei T. Die Strecke RS ist singulär, RT und TS also auch. Die Strecke PT ist hingegen ordinär. Hieraus folgt aber, dass die beiden Geraden g und h Nachbargeraden sind (21).

Es lässt sich also auch folgendes aussagen:

Zwei Geraden, von denen jede durch einen von zwei Nachbarpunkten hindurchgeht, sind entweder Nachbargeraden oder sie schneiden sich eindeutig.

25. Schneidet eine Gerade c die eine, a, von zwei einander benachbarten Geraden a, b eindeutig in A, so muss sie auch die andere Gerade, b, schneiden, und zwar ebenfalls eindeutig.

Beweis. Das Lot AN von A auf b ist eine singuläre Strecke, und da b und c nicht benachbart sind, weil a und b es sind, a und c aber nicht, so müssen die beiden durch A und N hindurchgehenden nicht benachbarten Geraden b und c sich eindeutig schneiden.

Insbesondere schneidet also jede Normale auf dem einen Schenkel eines singulären Winkels den andern Schenkel eindeutig.

Eine Gerade, welche zwei benachbarte Geraden schneidet, schneidet also entweder beide eindeutig oder beide mehrdeutig.

26. Es ist nun leicht zu beweisen, dass die Lote a, b von zwei Nachbarpunkten A, B auf zwei Nachbargeraden g, h gleichfalls Nachbargeraden sind, und dass ihre Fusspunkte G, H Nachbarpunkte sind. Es ist hinreichend, den Fall zu behandeln, wo g, h einander schneiden; in den anderen Fällen braucht man nur eine dritte Nachbargerade i, welche g und h schneidet, einzuschalten. Wenn aber g und h sich schneiden, wissen wir nach dem vorigen Satz, dass die beiden Geraden a, b, weil sie durch zwei Nachbarpunkte A, B hindurchgehen, entweder Nachbargeraden sind oder einander eindeutig schneiden. Der letztere Fall kann aber hier nicht eintreffen, weil zwei Normalen, welche von einem Punkt auf zwei Geraden mit eindeutigem Schnittpunkt gefällt werden, selbst eindeutigen Schnittpunkt haben müssen.

Dass G und H Nachbarpunkte sind, schliesst man z. B. daraus, dass a und h einander in einem solchen Punkt I schneiden müssen, dass GI und IH singuläre Strecken sind. GH ist somit ebenfalls singulär.

27. Erklärung. Ein ordinärer Winkel α soll wesentlich kleiner oder grösser als ein ordinärer Winkel β genannt werden, wenn er kleiner bzw. grösser als β ist und der Unterschied zwischen den beiden Winkeln ein nicht singuläre Winkel ist.

Gelegentlich wird auch den Ausdruck gebraucht, ein Winkel sei wesentlich spitz oder wesentlich stumpf, d. h. wesentlich kleiner bzw. grösser als ein Rechter.

28. Zwei Halbstrahlen a und b, die von den Endpunkten A und B einer singulären Strecke AB auf einer Geraden c nach derselben Seite dieser Geraden ausgehen und mit der Strecke AB in A einen wesentlich spitzen und in B einen rechten Winkel bilden, müssen sich schneiden, und zwar eindeutig. Denn die Geraden a, b sind nicht benachbart, weil die Normale n in A auf c nicht zu a benachbart ist.

29. Es lässt sich dann das folgende modifizierte »5te Postulat Euklids« beweisen:

Zwei Halbgeraden a, b, welche von zwei benachbarten Punkten A, B einer Geraden c nach derselben Seite dieser Geraden ausgehen und mit der Strecke AB zwei Winkel (ac) und (bc) bilden, deren Summe wesentlich kleiner als zwei Rechte ist, müssen einander schneiden, und zwar eindeutig (Fig. 8).

Bei einer Umwendung um den Mittelpunkt M von AB geht a in a_1 über; a_2 sei der zu a_1 entgegengesetzte Halbstrahl. Der Winkel ba_2 ist dann nicht singulär, und b, a_2

sind somit nicht benachbart. Da aber a und a_2 benachbart sind, sind also a und b nicht benachbart. Und hieraus folgt die Behauptung.

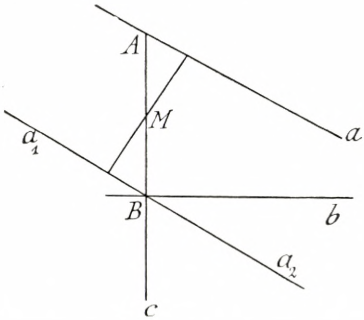

Fig. 8.

Innerhalb des Nachbarbereichs eines Punktes können wir dann jedenfalls behaupten, dass die Winkelsumme eines Dreiecks nur um einen singulären Winkel von zwei Rechten abweicht: Die Geometrie dieses Bereichs ist eine »fast-Euklidische«.

30. In diesem Zusammenhang möchten wir noch bemerken, dass man auch für eine beliebige Strecke AB eine spezielle Form des »5ten Postulats« aufstellen kann, nämlich die folgende:

Von zwei Halbgeraden a, b, welche von zwei beliebigen Punkten A, B einer Geraden c nach derselben Seite dieser Geraden ausgehen, bilde die eine, a, mit der Strecke AB in A einen singulären spitzen Winkel und die andere, b, in B einen Winkel, welcher wesentlich kleiner als zwei Rechte ausfällt. Dann müssen diese Halbgeraden einander schneiden, und zwar eindeutig.

Der Satz ergibt sich sofort aus dem Satz in 25, da von den beiden Nachbargeraden a, c die eine, c, von b eindeutig geschnitten wird, und daher auch die andere, a. Der Winkel (BA, b) kann auch singulär spitz sein, ein Fall der schon früher behandelt worden ist.

31. In zwei Nachbargeraden g, h lassen sich unendlich viele Rechtecke derart einschreiben,

dass zwei Gegenseiten des Rechtecks auf den beiden Geraden liegen.

In dem Falle, wo die beiden Geraden g, h einander schneiden, ist der Satz schon früher bewiesen worden (Erste Mitteilung S. 18).

In dem Fall, wo die Geraden keinen Punkt gemein haben, wählen wir auf g (Fig. 9) eine ordinäre Strecke PQ, fällen von Q das Lot QR auf h und ziehen die Gerade PR. Da die Strecke PQ ordinär, die Strecke QR hingegen

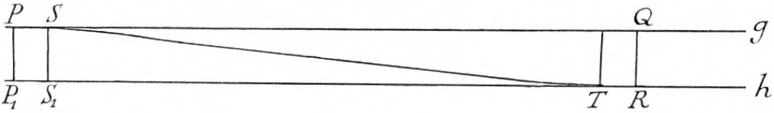

Fig. 9.

singulär ist, muss die Strecke PR ordinär sein. Die Gerade PR ist dann Nachbargerade zu g (und zu h), hat also ein Schnittelement um den Punkt P mit g und ein Schnittelement um R mit h gemein. Es lassen sich sodann zwei gleich grosse Strecken PS und TR in diesen Schnittelementen wählen, und wir wissen dann, dass die Strecke PS und ihre Projektion P_1S_1 auf h Gegenseiten eines Rechtecks sind. Hiermit ist unser Satz bewiesen.

32. In dem Falle, wo g und h sich schneiden, ist die Länge der Gegenseiten des eingeschriebenen Rechtecks durch das Schnittelement beschränkt, da nämlich gerade jeder Strecke innerhalb dieses Elements ein Seitenpaar dieser Länge entspricht. Auch wenn g und h sich nicht schneiden, kann man ein Element angeben, welches alle diejenigen Streckenlängen enthält, die bei Seitenpaaren eingeschriebener Rechtecke vorkommen können. Wir wollen dieses Element als Schiebelement der beiden Geraden g, h bezeichnen. Es gibt in der Tat Bewegungen, bei denen

alle Elemente dieser Grösse auf den beiden Geraden in sich verschoben werden. Diese Eigenschaft ist für Nachbargeraden charakteristisch.

33. Wenn die beiden Geraden g, h sich nicht schneiden, kann das Schiebelement die ganze Gerade umfassen. Das bedeutet, dass jede Normale der einen Geraden auch Normale der anderen ist.

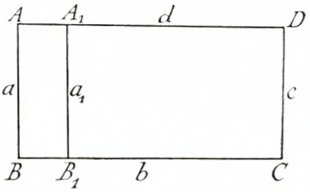

Fig. 10.

Es sei nun $ABCD$ (Fig. 10) irgend ein dreirechtwinkliges Viereck mit den Seitengeraden a, b, c, d, $d \perp a$, $a \perp b$, $b \perp c$; ferner sei a_1 eine Nachbargerade von a mit obengenannter Eigenschaft, d. h. $a_1 \perp d$ und $\perp b$. Die Bewegung aa_1c ist dann involutorisch, und wegen $aa_1 = AA_1$ ist auch AA_1c involutorisch, d. h. es gibt eine auf c senkrechte Gerade durch A, A_1, also eine auf c senkrechte Nachbargerade zu d.

Die Abweichung des Winkels D von einem rechten Winkel ist also singulär.

Gibt es also in unserer Ebene zwei Nachbargeraden mit gemeinsamem Normalensystem, so ist die Winkelsumme eines jeden Dreiecks nur um einen singulären Winkel von zwei Rechten verschieden.

Gibt es ein Rechteck mit ordinären Seiten, so ist die Winkelsumme eines jeden Dreiecks genau zwei Rechte (Erste Mitteilung, S. 19—20).

34. Zwei Nachbargeraden g, h bestimmen eine Bewegung gh, welche jeden Punkt in einen Nachbarpunkt überführt (eine singuläre Bewegung).

Der Punkt A gehe bei der Spiegelung g in A_1 und der Punkt A_1 bei der Spiegelung h in A_2 über; dann sind A und

A_2 benachbart, weil sie Spiegelbilder von A_1 an den beiden benachbarten Geraden g, h sind.

Haben g und h keinen Punkt gemein, so hat die Bewegung gh keinen Fixpunkt. Es müssten sonst nämlich zwei Punkte P, Q mit zwei verschiedenen Spiegelungsachsen g, h existieren, und diese Spiegelungsachsen hätten einen Punkt gemein nämlich den Mittelpunkt von PQ, was unserer Annahme widerstreitet.

Haben g und h einen Punkt und somit (weil sie Nachbargeraden sind) unendlich viele Punkte gemein, so hat die Bewegung unendlich viele Fixpunkte, nämlich erstens alle gemeinsamen Punkte P von g und h und zweitens alle gemeinsamen Punkte jedes Geradenpaares g_1, h_1 mit $g_1 \perp g, h_1 \perp h$ im Punkte P. Die hierdurch bestimmte Fixpunktmenge bildet einen konvexen Bereich, welcher von jeder Geraden, die in den Bereich eindringt, in einem Element geschnitten wird, das dem Schnittelement von g und h kongruent ist[1)].

Zwei Nachbarpunkte A, B bestimmen eine singuläre Bewegung AB, welche jede Gerade durch A und B fest lässt.

Sind g und h zwei Nachbargeraden und l eine beliebige Gerade, so ist die bei der Bewegung ghl feste Gerade eine Nachbargerade von l. Es folgt dies daraus, dass die Gerade l bei der Bewegung gh in eine Nachbargerade l' von sich übergeht und sodann bei der Bewegung ghl in eine andere Nachbargerade l'' übergeführt wird.

35. Wenn zwei gleichartig orientierte Nachbargeraden g, h von einer dritten orientierten Geraden l geschnitten werden, so ist der Unterschied zwischen den beiden Schnittwinkeln (g, l) und (h, l)

1) Vgl. hierzu Erste Mitteilung, S. 31—32.

ein singulärer Winkel. Es folgt dies daraus, dass eine Schiebung längs l, welche den Scheitel des ersten Winkels in den Scheitel des zweiten überführt, die orientierte Gerade g in eine zur orientierten Geraden h benachbarte orientierte Gerade g' überführt.

In ähnlicher Weise erhält man den folgenden allgemeineren Satz:

Der Unterschied zwischen zwei beliebigen benachbarten Winkeln ist stets ein singulärer Winkel.

Natürlich gilt ein entsprechender Satz für benachbarte Strecken.

III. Verallgemeinerung der Saccheri-Lambertschen Sätze.

36. Wir betrachten ein Viereck $ABCD$ mit rechten Winkeln bei A, B, C. Wir setzen voraus, dass die »Katheten«, d. h. die beiden Seiten AB und BC ordinäre Strecken sind. Einander gegenüberliegende Seitengeraden des Vierecks haben dann ordinäre Lage zueinander, d. h. sie sind nicht Nachbargeraden, und die beiden Strecken CD und DA sind dann ebenfalls ordinär. Vom vierten Winkel D lässt sich nun zunächst aussagen, dass er ordinär sein muss. Wenn nämlich die Geraden AD und CD benachbart wären, müssten auch ihre Lote durch B, nämlich BA und BC, benachbart sein, was unserer Voraussetzung, dass sie aufeinander senkrecht stehen, widerstreitet.

37. Im Viereck $ABCD$ (Fig. 11) verlängern wir nun AD über D hinaus nach E und fällen die Senkrechte EF von E auf die Verlängerung von BC. Hierdurch entsteht ein neues dreirechtwinkliges Viereck $ABFE$ mit ordinären

Seiten. Vergleichen wir nun die Winkel der beiden Vierecke bei D und E, so zeigt sich, dass sie entweder beide spitz, beide stumpf, oder beide rechte Winkel sind.

1) Zunächst untersuchen wir den ersten Fall, wo $\angle\ ADC$ spitz ist, und wollen zeigen, dass $\angle\ AEF$ dann auch spitz ausfallen muss (Fig. 11). Da $\angle\ ADC$ spitz ist, hat das Lot von A auf die Gerade CD seinen Fusspunkt Q auf der Strecke CD. Ferner hat das Lot von E auf die Gerade CD seinen Fusspunkt R auf der Verlängerung der Strecke CD über D hinaus, jedenfalls wenn die Strecke ED ordinär ist, was wir zunächst voraussetzen wollen. Die Strecke AR ist nun ordinär, und ihre Verlängerung über R hinaus bildet mit der Strecke RE einen spitzen Winkel, weil $\angle\ ARQ$ spitz und $\angle\ QRE$ recht ist. Das Lot m von E auf die Gerade AR muss also seinen Fusspunkt S auf dieser Verlängerung haben. Die drei Geraden AB, DC und EF sind Lote derselben Geraden BCF und somit in Involution. Vom Punkte E auf der dritten dieser Geraden haben wir Lote p, q auf die beiden ersten gefällt und die Fusspunkte A und R durch eine Gerade verbunden; ferner ist vom Punkt E das Lot m auf diese Verbindungsgerade AR gefällt. Nach dem Lotensatz (Zweite Mitteilung S. 4) besteht dann die folgende Gleichung

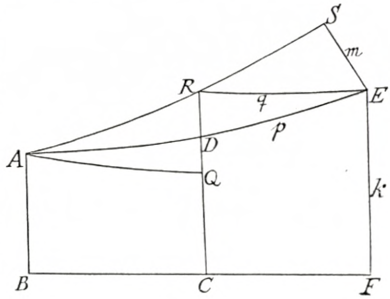

Fig. 11.

$$kp = qm.$$

Da nun ferner die Orientierungen

$$FEA,\ CDA,\ QDA,\ RDE,\ RAE,\ RES$$

der Reihe nach ersichtlich übereinstimmen, erkennt man durch Vergleichung der ersten und der letzten dieser Orientierungen und mit Hilfe der obigen Gleichung, dass

$$\angle\, FEA = \angle\, RES$$

ist. Da nun der letztere Winkel spitz ist, ist somit auch der erstere spitz, w. z. b. w.

Der spezielle Fall, dass DE singulär ist und R in D fällt, wobei dann $\angle\, ADC$ allerdings nur um einen singulären Winkel von einem Rechten abweicht, lässt sich folgendermassen erledigen: Die Gerade AR fällt mit p zusammen. Die Gerade m fällt ferner mit dem Lot von p in E zusammen und soll so orientiert werden, dass sie in diejenige durch AE bestimmte Halbebene weist, welche das Viereck nicht enthält. Die Gerade q enthält nach Voraussetzung die Strecke ED und folgt der Geraden p noch weiter, muss sie aber doch einmal verlassen und geht dann, weil $\angle\, ADC$ spitz ist, in dieselbe Halbebene hinein, die wir für m gewählt haben. Da nun stets $kp = qm$ ist, folgt sofort, dass der Winkel AEF spitz ist.

Durch ähnliche Betrachtungen lässt sich zeigen, dass auch in dem Falle, wo E auf der Strecke AD und AE ordinär gewählt wird, der Winkel AEF notwendig spitz ausfallen muss.

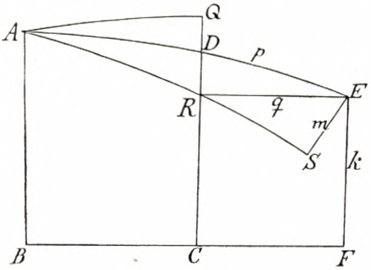

Fig. 12.

2) Der zweite Fall, wo $\angle\, ADC$ stumpf ist, wird in analoger Weise erledigt (Fig. 12):

Das Lot von E auf CD hat nun seinen Fusspunkt R auf der Strecke CD (oder in D, ein Fall, der einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleibt). Die Gerade AR ist eindeutig bestimmt. Das Lot m von E auf diese Gerade hat den Fusspunkt S. Man hat nun wie früher (nach dem Lotensatz) $kp = qm$, und da die Orientierungen

$$FEA, \; CDA, \; RDA, \; REA, \; RES$$

einander gleichwertig sind, ergibt sich durch Vergleichung der ersten und der letzten dieser Orientierungen, dass die Winkel FEA und RES Supplementwinkel sind, d. h. $\angle FEA$ ist stumpf.

Der Fall, wo R in D fällt, wird wie oben erledigt.

3) Der dritte Fall, wo $\angle ADC$ recht ist, wird unmittelbar durch den Lotensatz erledigt.

38. Aus den Sätzen von den dreirechtwinkligen Vierecken folgen nun leicht die Dreieckssätze:

1°. Wenn die Winkelsumme in einem Dreieck mit ordinären Seiten und Winkeln kleiner als zwei Rechte ausfällt, dann ist sie in jedem Dreieck kleiner oder gleich zwei Rechten.

2°. Wenn die Winkelsumme in einem Dreieck mit ordinären Seiten und Winkeln grösser als zwei Rechte ausfällt, dann ist sie in jedem Dreieck grösser oder gleich zwei Rechten.

3°. Wenn die Winkelsumme in einem Dreieck mit ordinären Seiten und Winkeln zwei Rechte ist, dann ist sie in jedem Dreieck gleich zwei Rechten.

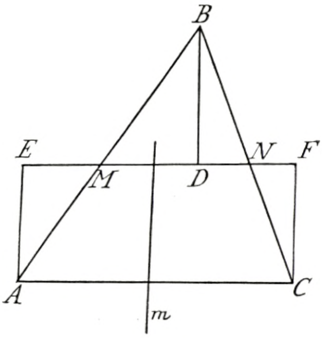

Fig. 13.

Die Sätze werden mit Hilfe der bekannten nebenstehenden Figur bewiesen: Im Dreieck ABC sind M und N die Mittelpunkte der Seiten AB und BC. Da die Strecke AC ordinär ist, muss auch die Strecke MN ordinär sein, und da die Strecken BM und BN und der Winkel MBN ordinär sind, gilt dies auch für das Lot BD und die mit diesem kongruenten Strecken AE, CF. Die Mittelsenkrechte m der Seite AC teilt das Viereck $AEFC$ in zwei kongruente ordinäre dreirechtwinklige Vierecke mit einem Winkel (bei A und bei C), welcher die Hälfte der Winkelsumme unseres Dreiecks ABC ausmacht.

Dieser Winkel ist dann spitz, stumpf oder recht, je nachdem die Winkelsumme des Dreiecks kleiner als, grösser als oder gleich zwei Rechten ist.

39. In dem Falle, wo die Winkelsumme zwei Rechte überschreitet, kann man von einem Exzess sprechen. Dieser Exzess ist jedoch immer in dem Sinne klein, dass man durch Vervielfältigung niemals einen rechten Winkel überschreiten kann. Dies folgt aus nebenstehender Figur (Fig. 14), wo aus dem Dreieck ABC, mittels Umwendungen um die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB, drei andere Dreiecke BCA_1, CAB_1, ABC_1 abgeleitet sind.

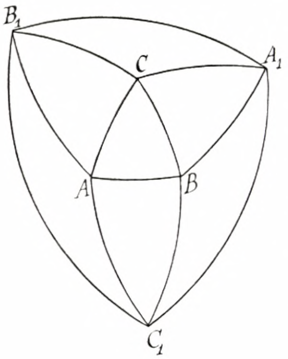

Fig. 14.

Es entsteht hierdurch ein Dreieck $A_1B_1C_1$, dessen Exzess — nach wohlbekannten Überlegungen — wenigstens viermal so gross wie der Exzess ε des ursprünglichen Dreiecks ist. Durch Widerholung dieses Prozesses könnte man sonach Dreiecke herstellen, deren Exzesse jedes vorgegebene Vielfache von ε überschreiten. Hieraus folgt aber gerade, dass ε im obengenannten Sinn klein ist. Es folgt aber hieraus nicht dass der Winkel ε ein singulärer Winkel ist.

In allen Fällen, in denen das Eindeutigkeitsaxiom nicht allgemeine Gültigkeit hat, gibt es Dreiecke, deren Winkelsumme zwei Rechte ausmacht (Erste Mitteilung S. 18), und es lässt sich um jeden Punkt der Ebene ein Bereich angeben, innerhalb dessen jedes Dreieck die Winkelsumme zwei Rechte hat.

IV. Singuläre Dreiecke.

40. Ein Dreieck mit ordinären Seiten und ordinären Winkeln soll ordinär heissen. Von ordinären Dreiecken ist leicht zu beweisen, dass jede Seite kleiner als die Summe der beiden anderen ist, und dass die Euklidischen Sätze über Ungleichheiten zwischen Seiten und ihren gegenüberliegenden Winkeln Gültigkeit haben. Für singuläre Dreiecke, d. h. Dreiecke, wo singuläre Seiten oder Winkel vorkommen, treten aber Modifikationen ein. Wir wollen hier die folgenden Sätze über singuläre Dreiecke hervorheben:

1°. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit einem singulären Winkel A, dessen Scheitelelement grösser als die gegenüberliegende Kathete BC ist, ist die Hypotenuse AB gleich der anderen Kathete AC (Fig. 15).

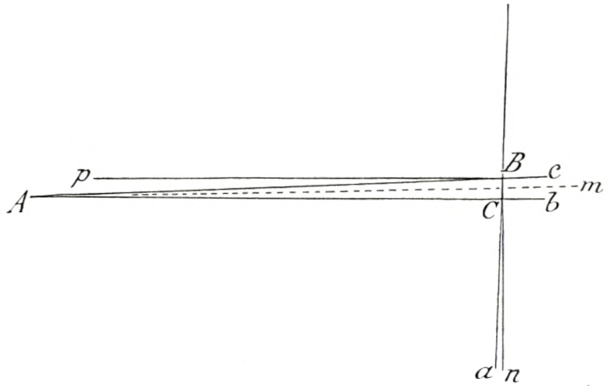

Fig. 15.

Die Seitengeraden sind a, b, c. In B errichten wir das Lot n auf c. Die Geraden n und a sind dann Nachbargeraden, und es lässt sich zeigen, dass sie wenigstens die Strecke BC gemein haben. Wenn wir nämlich in B das Lot p auf a errichten, wissen wir, dass p und c ein Element gemein haben, welches dem Scheitelelement des Winkels A kongruent ist oder noch grösser als dieses Element ausfällt[1)], und da $pc = an$ ist, folgt hieraus, dass auch a und n ein ebenso grosses Element gemein haben. Da ferner BC kleiner als dieses Element ist, folgt hieraus, dass a und n jedenfalls die Strecke BC gemein haben.

Es sei nun m die Spiegelungsachse des Winkels A. Fällen wir von C das Lot n_1 auf m, so fällt n_1 zwischen a und n, und n_1 muss dann mit a jedenfalls ein ebenso grosses Element gemein haben, wie n und a, d. h. die Strecke BC ist in n_1 enthalten; n_1 muss dann c in B treffen, d. h. die Strecken AB und AC sind gleich.

2°. In einem Dreieck ABC mit zwei singulären spitzen Winkeln A und B, wo die Höhe CH von der dritten Ecke C auf die Grundlinie AB kleiner ist als die Scheitelelemente der beiden Winkel A und B, ist die Grundlinie AB gleich der Summe der beiden anderen Seiten.

Der Satz ergibt sich durch Anwendung des vorigen Satzes auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke AHC und BHC.

3°. In einem Dreieck mit einem singulären Winkel A ist die Winkelsumme fast zwei Rechte, d. h. die Abweichung von zwei Rechten ist ein singulärer Winkel.

[1)] Erste Mitteilung, S. 18: Jede Strecke des Elementes A ist einer Strecke kongruent, welche den beiden Geraden p, c gemeinsam ist.

Ist der Winkel A rund, so ist die Sache klar. Ist der Winkel spitz, so gilt folgendes (Fig. 16): Eine Schiebung längs der Seitengerade a, bei der B in C übergeht, ist eine singuläre Bewegung, die die Seitengerade c in eine Nachbargerade c' überführt, und da c Nachbargerade von b ist, ist auch c' Nachbargerade von b, d. h. c' und b bilden bei C einen singulären spitzen Winkel. Dieser Winkel ist aber $2\,R - (B + C)$, woraus der Satz folgt.

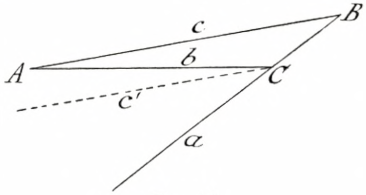

Fig. 16.

Bemerkung. Die Gerade c' muss ausserhalb des Dreiecks liegen; die Summe der beiden Dreieckswinkel B, C ist immer kleiner als $2\,R$. Der Satz vom Aussenwinkel ist allgemein gültig in unserer Geometrie.

V. Die Spiegelungsachse zweier Geraden.

41. Unseren Voraussetzungen zufolge kann durch Bewegung jede Gerade in jede andere Gerade übergeführt werden. Es folgt dann nach Axiom V, dass zwei Geraden mit einem gemeinsamen Punkt zwei zueinander senkrechte Spiegelungsachsen durch diesen Punkt haben.

Haben zwei Geraden a, b unendlich viele Punkte gemein, und ist P einer dieser Punkte, so bilden die beiden Geraden zwei singuläre spitze Scheitelwinkel mit dem gemeinsamen Scheitel P. Es gibt dann (Axiom V) eine Spiegelungsachse p durch P, derart dass jeder der beiden Winkel bei der Spiegelung p in sich selbst übergeht, und eine andere Spiegelungsachse q, derart dass die beiden singulären Winkel bei der Spiegelung q miteinander vertauscht werden. Die Spiegelungsachse p enthält das ganze

Scheitelelement (Schnittelement) der Geraden a, b. Die Spiegelungsachse q ist senkrecht zu p, und wenn P das ganze Scheitelelement durchläuft, durchläuft q eine ganze Reihe von Spiegelungsachsen $\perp p$.

42. Haben zwei Geraden a, b keinen Punkt gemein, so haben sie eine und nur eine Spiegelungsachse. Das lässt sich folgendermassen einsehen.

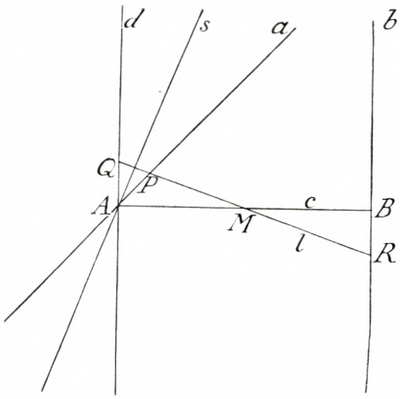

Fig. 17.

Von einem auf a gelegenen Punkt A (Fig. 17) fällen wir das Lot c auf b; der Fusspunkt sei B. Durch A ziehen wir eine Gerade $d \perp c$. Der Mittelpunkt der Strecke AB sei M. Diejenige Spiegelungsachse der beiden Geraden a, d, welche nicht in demjenigen Winkel (ad) gelegen ist, der M enthält, sei s. Wir legen nun durch M eine Gerade $l \perp s$. Diese Gerade l muss a schneiden, nämlich in einem Punkt P desjenigen Halbstrahls von a, welcher einen spitzen Winkel mit dem von A ausgehenden und durch B hindurchgehenden Halbstrahl von c bildet. Sie muss sodann auch die Gerade d schneiden, nämlich im Spiegelbild Q von P an s. Schliesslich schneidet dann die Gerade l auch die Gerade b, nämlich in dem aus Q durch Umwendung um M hervorgehenden Punkt R.

Die Bewegung sMR muss nun a in b überführen. Diese Bewegung ist aber eine Spiegelung s', deren Achse senkrecht auf l steht. Hiermit haben wir eine Spiegelungsachse konstruiert. Dass zwei Spiegelungsachsen in diesem Falle nicht vorhanden sein können, ergibt sich daraus, dass ein

Punkt A von a bei den Spiegelungen an zwei Achsen in zwei Punkte B, C übergehen müsste, sodass ein Dreieck entstehen würde, bei dem ein Aussenwinkel kleiner als ein Innenwinkel ist, was nicht vorkommen kann.

VI. Die Gross-Geometrie.

43. Wir konstruieren nun eine neue Geometrie, deren »Punkte« die Punkt-Nachbargebiete und deren »Geraden« die Geraden-Nachbargebiete der ursprünglichen Geometrie sind. Die neue Geometrie soll als »Gross-Geometrie« und ihre Punkte und Geraden als »Grosspunkte« und »Grossgeraden« bezeichnet werden.

Es gilt dann der Satz:

J e z w e i G r o s s p u n k t e $Ⓐ$, $Ⓑ$ b e s t i m m e n e i n d e u t i g e i n e G r o s s g e r a d e $\textcircled{g}$, w e l c h e d i e b e i d e n G r o s s p u n k t e e n t h ä l t.

Wir können in dieser Gross-Geometrie ganz wie in der alten Geometrie von Bewegungen sprechen. Jede Grossgerade $\textcircled{g}$ bestimmt eine Spiegelung, welche jedem Grosspunkt $Ⓐ$ einen Grosspunkt $\textcircled{A'}$ zuordnet, wobei A' und A einander bei der Spiegelung g entsprechen. Jede Bewegung in der Gross-Geometrie entsteht so durch Zusammenfassung einer Menge von Bewegungen der ursprünglichen Geometrie, bei denen Nachbarpunkte in Nachbarpunkte übergehen.

44. Es zeigt sich so, dass alle Axiome der ursprünglichen Geometrie auch in der Grossgeometrie gelten. Und da zudem das Eindeutigkeitsaxiom in der Grossgeometrie erfüllt ist, gilt hier also die ganze projektive Geometrie. Ebenso können alle Begriffsbildungen aus der Kongruenzlehre auf Grund des Eindeutigkeitsaxioms: Idealpunkte, Halbdrehungen, Idealgeraden u. s. w. übernommen werden.

Der Pascalsche Satz gilt dann in der folgenden Form: Wenn drei verschiedene Grosspunkte A, B, C auf einer Grossgeraden g und drei andere von einander verschiedene Grosspunkte A_1, B_1, C_1 auf einer anderen Grossgeraden g_1 liegen, und wenn ferner die Schnittpunkte der drei Grossgeradenpaare AB_1, A_1B; AC_1, A_1C; BC_1, B_1C eigentlich sind, so liegen diese Punkte auf einer Grossgeraden.

Die ganze Figur lässt sich durch eine entsprechende Figur in der ursprünglichen Ebene fixieren, in der keine zwei Punkte Nachbarpunkte und keine zwei Geraden Nachbargeraden sind.

45. Es bleibt nun noch zu untersuchen, wie sich die Beziehungen zwischen Nachbarfiguren, im besonderen Nachbarpunkten und Nachbargeraden gestalten.

Als Erweiterung einer singulären Strecke a soll der gemeinsame Punktbereich aller Geraden, welche die Strecke enthalten, bezeichnet werden.

Zwei singuläre Strecken a, b sollen ordnungsgleich genannt werden, wenn ihre Erweiterungen $E(a)$, $E(b)$ kongruent sind.

Wenn $E(a)$ grösser als $E(b)$ ausfällt, d. h. wenn $E(a)$ einen zu $E(b)$ kongruenten echten Teil enthält, sagen wir, dass a ordnungsgrösser als b (b ordnungskleiner als a) ist.

Für zwei singuläre Winkel können ähnliche Definitionen aufgestellt werden, indem man die Erweiterung eines singulären Winkels (a, b), als das Büschel (das Büschelelement) sämtlicher Geraden definiert, welche das Scheitelelement des gegebenen Winkels enthalten.

46. Den Winkel zweier Geraden a, b mit dem Schnittelement E messen wir durch eine Strecke, welche als Ordinate des Winkels bezeichnet werde. Diese Strecke

ist das in einem Punkt P der einen Geraden a errichtete Lot PQ bis zum Schnitt Q mit der anderen; hierbei wird der Punkt P so gewählt, dass sein Abstand von einem Punkt A des Schnittelements E ordinär ist. Wir wollen diesen Abstand AP konstant wählen und ihn als Einheit (Eichmass) bezeichnen. Es ist zu beachten, dass die Wahl von A innerhalb E ohne Belang ist; wir wissen nämlich, dass eine singuläre Veränderung des Fusspunktes P innerhalb des Grössenbereichs E keinen Einfluss auf die Grösse von PQ hat, da zwei verschiedene Strecken PQ, die vorkommen können, immer Gegenseiten eines Rechtecks sind (Erste Mitteilung S. 18). Die Ordinate eines bestimmten singulären Winkels ist also nach Wahl der Einheit wirklich eindeutig bestimmt.

Singuläre Winkel werden hiernach wesentlich durch ihr Scheitelelement (Schnittelement) und ihre Ordinate gekennzeichnet.

47. Der einfachste Fall unserer Geometrie ist nun derjenige, wo alle singulären Strecken ordnungsgleich sind, wo also alle Schnittelemente kongruent sind. Mit diesem Falle wollen wir anfangen.

Die Ordinate eines singulären Winkels ist dann der Grösse nach im Scheitelelement des Winkels enthalten, und hieraus folgt, dass ein Rechteck mit zwei beliebig gegebenen singulären Dimensionen konstruiert werden kann. Allgemeiner:

Die Geometrie im Nachbargebiet eines Punktes A, also die Geometrie innerhalb des Grosspunktes (A), ist die Euklidische Geometrie.

Jede Gerade, welche in das Gebiet (A) eindringt, hat eine Punktmenge mit dem Gebiet gemein. Diese Punktmenge soll als Gerade im Gebiet bezeichnet werden. Durch zwei

Punkte A, B des Gebiets gehen unendlich viele Geraden der ursprünglichen Ebene; da aber alle Schnittelemente kongruent sind, haben alle diese Geraden dasselbe Element gemein, d. h. innerhalb des Gebiets bestimmen zwei Punkte eine und nur eine Gerade. Da zudem Rechtecke (mit beliebigen Dimensionen) innerhalb des Gebiets existieren, ist die ganze Geometrie des Gebiets die Euklidische.

48. Ein Kreis mit ordinärem Halbmesser OA hat in A eine auf OA senkrechte Tangente t. Alle Nachbarpunkte des Punktes A auf der Tangente liegen auch auf dem Kreis. Es folgt dies unmittelbar aus dem Satz 39,1°. Also:

Ein Kreis mit ordinärem Halbmesser hat mit jeder Tangente ein Element gemein.

Zwei einander berührende Kreise mit ordinären Halbmessern haben ebenfalls ein Element gemein.

Hingegen hat jeder Kreis mit singulärem Halbmesser nur einen Punkt mit der Tangente gemein, und dies gilt auch für zwei einander berührende Kreise, von welchen wenigstens einer singulären Halbmesser hat.

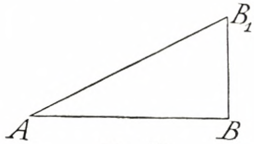

Fig. 18.

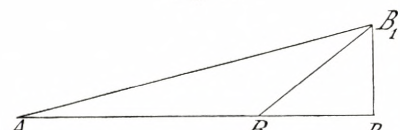

Fig. 19.

49. Es ergibt sich nun leicht folgendes:

1°. Ist AB eine ordinäre Strecke (Fig. 18) und $BB_1 \perp AB$ eine singuläre Strecke, so gilt $AB = AB_1$.

2°. Ist AB eine ordinäre Strecke (Fig. 19), BB_1 eine beliebige singuläre Strecke und BB_2 deren Projektion auf AB, so gilt

$$AB_1 - AB = BB_2,$$

mit Vorzeichen in der Richtung AB gerechnet.

3°. Ist AB eine ordinäre Strecke (Fig. 18) und BB_1 eine singuläre Strecke, welche »fast senkrecht« auf AB ist, d. h. einen singulären Winkel mit der Normalen von AB in B bildet, so gilt $AB_1 = AB$ (folgt aus 1°).

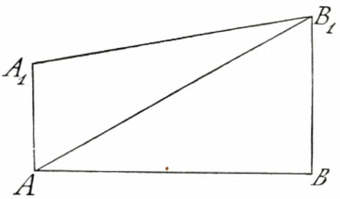

Fig. 20.

4°. Sind AB eine ordinäre Strecke (Fig. 20), AA_1 und BB_1 zwei singuläre Strecken, welche senkrecht zu AB (oder fast senkrecht zu AB) sind, so gilt $AB = A_1B_1$. Man hat nämlich nach 3°:

$$AB = AB_1 = A_1B_1.$$

Eine ordinäre Strecke ist also immer gleich ihrer Projektion auf eine Nachbargerade.

5°. Ist AB eine ordinäre Strecke (Fig. 21), A_1B_1 eine beliebige Nachbarstrecke und A_2B_2 ihre Projektion auf AB, so gilt $A_1B_1 = A_2B_2$ und

$$A_1B_1 - AB = A_2B_2 - AB = BB_2 - AA_2.$$

Fällt man die Lote AA_3 und BB_3 auf A_1B_1, so hat man auch $AB = A_3B_3$. Die beiden Vierecke $AA_2A_1A_3$ und $BB_2B_1B_3$ sind Rechtecke.

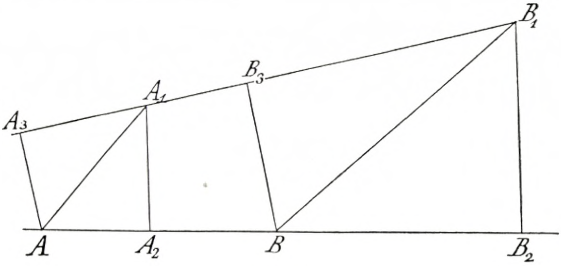

Fig. 21.

50. Wir gehen nun daran, die Abstände zwischen Nachbarpunkten zweier Nachbargeraden zu untersuchen.

Zwei Nachbargeraden g, g_1 (Fig. 22) mögen von dem gemeinsamen Punkt A ausgehen. Die Punkte B und C seien so auf g gewählt, dass die Strecken AB und AC ordinär sind. Wir errichten die Lote BB_1 und CC_1 auf g, welche g_1 in B_1 und C_1 schneiden.

Wir wollen die beiden Strecken BB_1 und CC_1 vergleichen. Sie sind singulär und können deshalb durch Bewegung in

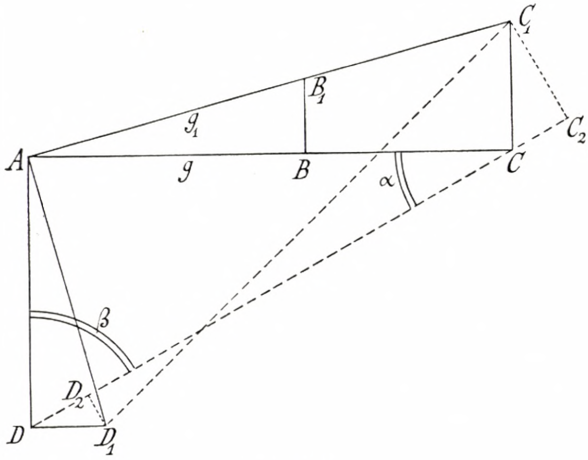

Fig. 22.

ein Nachbargebiet eines beliebigen Punktes übergeführt und sodann als Strecken einer Euklidischen Ebene angesehen werden. Infolgedessen kann man von dem Verhältnis $\frac{BB_1}{CC_1}$ reden.

Wir drehen nun das Dreieck ABB_1 um einen rechten Winkel; es gehe dabei in ADD_1 über. Die beiden Figuren ACD und AC_1D_1 sind dann kongruent, und die Nachbarstrecken CD und C_1D_1 sind einander gleich. Projiziert man C_1D_1 auf CD in C_2D_2, so hat man also

$$CC_2 = DD_2,$$

und hieraus folgt

$$CC_1 \sin\alpha = DD_1 \sin\beta$$

und wegen $DD_1 = BB_1$

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Im ordinären Dreieck ACD können wir aber die gewöhnliche Trigonometrie anwenden, also z. B. den Sinussatz

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{s(AD)}{s(AC)} = \frac{s(AB)}{s(AC)},$$

wo $s(AB)$ und $s(AC)$ als allgemeine Bezeichnungen für sinus der Grossseiten AB und AC stehen. (In der sphärischen Geometrie ist dies der gewöhnliche sinus, in der hyperbolischen Ebene der hyperbolische sinus, und in der Euklidischen Ebene ist $s(AB) = AB$, $s(AC) = AC$ zu setzen[1]).

Es folgt dann

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{s(AB)}{s(AC)}.$$

51. Liegen nun zwei beliebige Nachbargeraden g, g_1 vor, wo gemeinsame Punkte nicht vorausgesetzt werden,

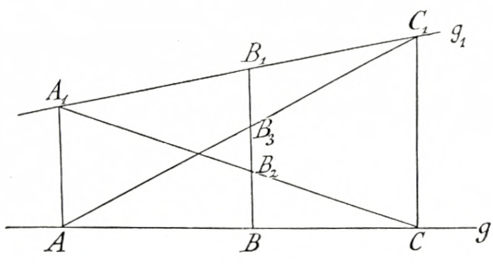

Fig. 23.

[1]) Die diesbezüglichen notwendigen Einzelheiten sind von F. Schur in seinen Grundlagen der Geometrie entwickelt. In einer weiteren Arbeit beabsichtige ich in anderer Weise auf hierher gehörige Fragen näher einzugehen.

so untersuchen wir die zwischen ihnen liegenden Ordinaten in folgender Weise. In drei beliebigen Punkten A, B, C von g (Fig. 23) mit ordinären Abständen errichten wir die Ordinaten AA_1, BB_1, $CC_1 \perp g$ und ziehen die Geraden A_1C und AC_1, welche BB_1 in den Punkten B_2 und B_3 schneiden mögen.

Aus dem vorigen Satz folgt nun

$$BB_2 = AA_1 \cdot \frac{s(BC)}{s(AC)},$$

$$BB_3 \text{ oder } B_2B_1 = CC_1 \cdot \frac{s(AB)}{s(AC)},$$

also

$$BB_1 = BB_2 + B_2B_1 = AA_1 \cdot \frac{s(BC)}{s(AC)} + CC_1 \cdot \frac{s(AB)}{s(AC)},$$

oder (indem wir mit Vorzeichen rechnen)

$$AA_1 \cdot s(BC) + BB_1 \cdot s(CA) + CC_1 \cdot s(AB) = 0.$$

In dieser Formel können in den Abständen BC, CA, AB die Punkte A, B, C beliebig innerhalb ihrer Nachbargebiete variieren. Die Ordinaten AA_1, BB_1, CC_1 bleiben dabei ungeändert.

52. Benachbarte Dreiecke. Von zwei benachbarten Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ lässt sich nun ganz allgemein aussagen, dass die Differenzen entsprechender Seiten und entsprechender Winkel dieselben Relationen erfüllen, wie die Differenziale der Seiten und Winkel des Grossdreiecks Ⓐ Ⓑ Ⓒ. Was die Seiten anbetrifft, geht dies aus den schon durchgeführten Erwägungen hervor, und für die Winkel brauchen wir nur auf die Figur (Fig. 24) hinzuweisen, wo z. B. der Winkel $B_1A_1C_1$ gleich dem Winkel (q, p) zwischen den von A auf A_1C_1 und A_1B_1 gefällten

Loten p und q ist; es folgt dies daraus, dass im Nachbargebiet (A) von A die Euklidische Geometrie gültig ist.

Benachbarte Figuren $ABCD$ . . . und $A_1B_1C_1D_1$ . . . lassen sich ebenso behandeln. Die zwischen ihnen bestehenden Relationen sind identisch mit den aus den Grundformeln der Grossfigur $(A)(B)(C)(D)$ . . . und deren Ableitungen (Differenzialformeln) hervorgehenden.

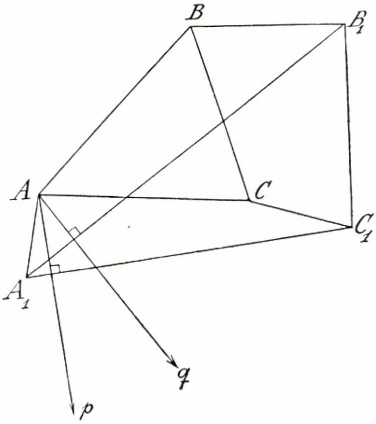

Fig. 24.

53. Das Hauptresultat lässt sich dann folgendermassen formulieren:

In der vorgelegten Ebene denken wir uns eine Menge $\mathfrak{M}$ von Punkten derart ausgewählt, dass keine zwei Punkte dieser Menge benachbart sind, und dass jeder Punkt der Ebene Nachbarpunkt eines Punktes von $\mathfrak{M}$ ist.

Die Menge $\mathfrak{M} = (A, B, C, \ldots.)$ heisst die Grundmenge.

Irgend einer Figur der Ebene A_1, B_1, C_1, . . . entspricht dann eine bestimmte Figur A, B, C, . . . von $\mathfrak{M}$ als Nachbarfigur.

Die Relationen der Figur $A_1B_1C_1$ . . . bezüglich ABC . . ., lassen sich alle aus den Grundrelationen der Grossfigur $(A)(B)(C)$ . . . und deren Ableitungen herstellen.

Die Auswahl der Grundmenge lässt sich in mannigfacher Weise vornehmen. Für jede Wahl gelten aber die obengenannten Beziehungen.

54. Dieses Hauptresultat lässt sich auch in folgender Weise ausdrücken:

Wird in der Grossfigur Ⓐ Ⓑ Ⓒ .... ein Koordinatensystem eingeführt, so kann jeder Punkt der Grundfigur ABC ..... durch die Koordinaten u, v des entsprechenden Punktes der Grossfigur fixiert werden; und jeder Punkt einer beliebigen Figur $A_1B_1C_1$ ..... unserer Ebene lässt sich dann durch Koordinaten der Form $u + \varepsilon u_1$, $v + \varepsilon v_1$ mit $\varepsilon^2 = 0$ fixieren.

Hiermit können wir den einfachsten Fall unserer Geometrie, wo alle singulären Strecken ordnungsgleich sind, als erledigt betrachten.

VII. Der allgemeine Fall.

55. Wir gehen nun daran, einige Betrachtungen über den allgemeinen Fall, wo nicht-kongruente Schnittelemente existieren, anzustellen.

Jeder singulären Strecke a entspricht ein Element $E(a)$, die Erweiterung von a mit der Eigenschaft, dass alle Geraden, welche a enthalten, auch $E(a)$ enthalten. Wir wissen, dass $E(a)$ alle Vielfachen von a enthalten muss, oder anders ausgedrückt, dass $E(a)$ wenigstens den »Eudoxischen Bereich« von a enthält; ob $E(a)$ umfassender als dieser Bereich sein kann, bleibe dahingestellt. Im folgenden setzen wir voraus, dass $E(a)$ stets mit dem Eudoxischen Bereich von a identisch ist.

In ähnlicher Weise entspricht jedem singulären Winkel α ein Büschelelement $E(\alpha)$, dessen Umfang durch den Eudoxischen Bereich des Winkels gegeben sein soll.

Ebenso wie jeder Punkt eines Schnittelements als Mittelpunkt des Elements betrachtet werden kann, kann auch jede Gerade eines Büschelelements als Spiegelungsachse des Elements aufgefasst werden, und dasselbe gilt sodann auch für jede Normale einer Büschelgeraden in einem Punkt des Schnittelements.

56. Wir kehren nun zur Figur 5 in 17 zurück: Die beiden Nachbargeraden a, b haben den gemeinsamen Punkt A; ihre Lote in A sind n und n_1. Die Strecke AQ ist

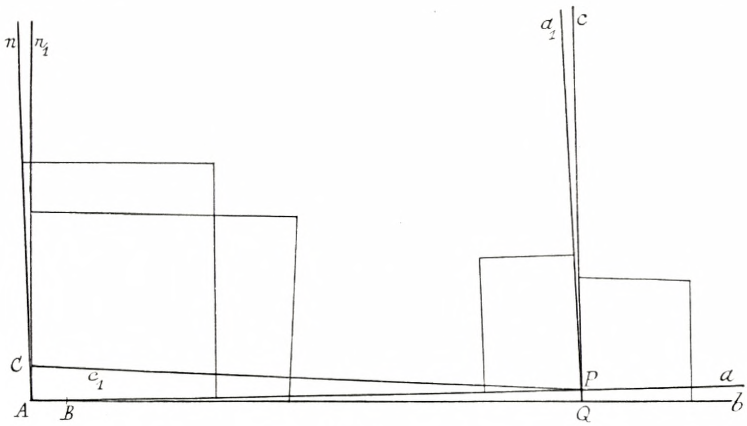

Fig. 5.

ordinär; die Normale c auf b in Q schneidet a in P. Die Normale von a in P ist a_1.

Es sei nun c' eine beliebige von c verschiedene Verbindungsgerade von P, Q und c_1 die ihr in der Weise zugeordnete Gerade durch P, dass $c'c = ac_1$, also $c' = ac_1c$ ist. Ist nun m die Normale von c' in P, so wird

$$m = Pc' = Pac_1c = a_1c_1c.$$

Hieraus folgt aber, dass die Bewegung abc_1, also auch nn_1c_1, involutorisch ist. Da nun c_1 (wegen $c'c = ac_1$) Nachbargerade von a ist, schneidet sie die Normale n von a eindeutig in einem Punkt C; durch diesen Punkt muss dann aber auch n_1 hindurchgehen. Es stellt sich also heraus, dass das Geradenbüschel (c'), welches die singuläre Strecke PQ enthält, demjenigen Strahlenbüschel $P(C)$ kongruent ist, welches das gemeinsame Element der Geraden n, n_1 vom Punkt P aus projiziert. Dieses Element ist aber dem gemeinsamen Element der Geraden a, b kongruent.

Wir ziehen nun das ganze durch die beiden Geraden a, b bestimmte Büschel (a, b) in Betracht. Sein Schnittelement sei mit $S(a, b)$ bezeichnet. Ferner betrachten wir den Punktbereich $\Sigma\,(P, Q)$, welcher als Durchschnitt des Büschels (a, b) mit c entsteht; wir bezeichnen ihn als Ordinatenbereich des Büschels, indem wir die Strecke AQ gleich der festen Einheit für Ordinatenmessungen gewählt denken. Ist nun $\Sigma\,(P, Q) < S(a, b)$, also die Voraussetzung in 17, dass die Strecke PQ kleiner als $S(a, b)$ ist, erfüllt, so hat man $AP = AQ$, und es geht dann aus der obenstehenden Untersuchung hervor, dass die beiden Elemente $S(a, b)$ und $\Sigma(P, Q)$ in der Weise reziprok verbunden sind, dass nicht nur, wie gegeben, $S(a, b)$ Schnittelement eines Büschels mit dem Ordinatenelement $\Sigma(P, Q)$ ist, sondern auch umgekehrt $\Sigma(P, Q)$ Schnittelement eines Büschels ist, dessen Ordinatenelement mit $S(a, b)$ kongruent ist.

In dieser Weise treten die Schnittelemente verschiedener Ordnung paarweise als reziproke Elemente auf. Bei dem Beweis wurde allerdings die Voraussetzung gemacht, dass die Strecke PQ kleiner als $S(a, b)$ ist. Es ist aber leicht einzusehen, dass unser Resultat auch in dem Falle, wo diese Bedingung nicht erfüllt ist, gültig bleibt. Ist nämlich $PQ > S(a, b)$, so lässt sich allerdings nicht mehr schliessen, dass $AP = AQ$ ist; ist aber $AP > AQ$, so hat man jedenfalls die Streckenungleichung

$$AP - AQ < PQ,$$

und hieraus folgt, dass Ordinatenmessungen im Büschel mit dem Schnittelement $\Sigma(P, Q)$ unabhängig davon sind, ob man AQ oder AP als Einheit benützt.

Das grösste Schnittelement erhält man, wenn man auf einer Geraden alle Nachbarpunkte eines Punktes zusammenfasst. Das hierzu reziproke ist dann das kleinst mögliche Schnittelement.

Aus 39,1° geht hervor, dass jeder Kreis mit ordinärem Halbmesser mit seiner Tangente wenigstens ein kleinstes Schnittelement gemein hat.

57. Aus den Schnittelementen leiten wir nun »ebene Elemente« in folgender Weise ab. Auf einer Geraden sei ein Schnittelement Σ gegeben. Ein beliebiger Punkt O von Σ kann als Mittelpunkt von Σ betrachtet werden. Wir drehen nun Σ in der Ebene um O. Der hierbei beschriebene Bereich der Ebene soll als e b e n e s E l e m e n t von derselben Ordnung wie Σ bezeichnet werden. Es lässt sich sofort einsehen, dass dieser Bereich konvex ist, und dass jede Gerade, welche irgend einen Punkt des Bereichs enthält, aus dem ganzen Bereich ein Schnittelement herausschneidet, welches dem erzeugenden Schnittelement Σ kongruent ist.

Ist Σ Schnittelement zweier Geraden a, b, so ist der von ihm erzeugte ebene Bereich mit der Fixpunktmenge der Bewegung ab identisch.

Reziproken Schnittelementen entsprechen reziproke ebene Elemente.

Das grösste ebene Element ist der Bereich aller Nachbarpunkte eines Punktes, also genau das, was wir früher als Grosspunkt bezeichnet haben. Das kleinste ebene Element ist das hierzu reziproke Element. Das nächstgrösste und das nächstkleinste Element sind reziprok, u. s. w.

Ebene Elemente verschiedener Ordnung sollen auch als Grosspunkte verschiedener Ordnung bezeichnet werden.

58. In der inneren Geometrie eines jeden Elements sind alle ursprünglich aufgestellten Axiome gültig, wenn wir nur unter »Gerade« den Durchschnitt unseres Elements mit einer ursprünglichen Geraden verstehen.

In der Geometrie des kleinsten Elements gilt das Eindeutigkeitsaxiom; da ferner Rechtecke existieren, ist diese Geometrie die Euklidische.

In der Geometrie des grössten Elements (des Elements erster Ordnung), gilt das Eindeutigkeitsaxiom im allgemeinen nicht. Man kann aber hier wie in der ursprünglichen Geometrie »Grosspunkte« einführen, welche dann als »Grosspunkte (Elemente) zweiter Ordnung« zu bezeichnen sind, und welche natürlich mit den ebenen Elementen zweiter Ordnung der ursprünglichen Geometrie identisch sind. Man kommt so zu Untergeometrien erster, zweiter, dritter, . . ., n'ter Ordnung. Man darf aber nicht erwarten, dass diese Reihe von Untergeometrien endlich sein muss. Es lassen sich auf vielfache Weise Beispiele aufstellen, wo die Geometrie eine unendliche Menge von solchen Elementen umfasst.

59. Als einfaches Beispiel einer Geometrie mit einer endlichen Anzahl von Elementen nennen wir eine Koordinatengeometrie, in der die Koordinaten Polynome der Form

$$a = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

sind, wo die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ reelle Zahlen bedeuten und t eine Unbestimmte ist, die der Relation

$t^{n+1} = 0$ genügt, und mit der man im übrigen in gewöhnlicher Weise rechnet.

Das Vorzeichen von a soll als das Vorzeichen des ersten von Null verschiedenen Koeffizienten definiert werden; dass $a > b$ ist, soll bedeuten, dass $a - b$ positiv ist; die gewöhnlichen Rechnungen mit Ungleichungen werden dann nur in der Weise modifiziert, dass aus $a > 0$, $b > 0$, nur $ab \geqq 0$ folgt. Nullteiler sind alle diejenigen Polynome a, deren Grundkoeffizient a_0 gleich Null ist; ist

$$a = a_r t^r + a_{r+1} t^{r+1} + \ldots + a_n t^n, \text{ mit } a_r \neq 0,$$

so soll a Nullteiler von r'ter Ordnung heissen.

Wir beschränken uns auf die »Euklidische« Ebene, wo die Geraden in gewöhnlicher analytischer Darstellung durch lineare Gleichungen in den laufenden Koordinaten x, y und die Bewegungen durch orthogonale Substitutionen gegeben sind.

Zwei einander schneidende Nachbargeraden können dann immer durch Gleichungen

$$y = 0, \; y = ax,$$

wo a ein Nullteiler ist, dargestellt werden. Ihr Winkel ist durch die Ordinate $y = a$ (indem $x = 1$ gesetzt wird) bestimmt. Ihr Schnittelement ist durch alle solche x gegeben, für welche $ax = 0$ ist. Es geht hieraus hervor, dass reziproke Elemente auf der x-Achse durch die Nullteiler der Ordnungen r und $n + 1 - r$ bestimmt werden, d. h. einerseits alle Punkte, deren Abszissen Nullteiler von der Ordnung r, und andererseits alle Punkte, deren Abszissen Nullteiler von der Ordnung $n + 1 - r$ sind, bilden zwei reziproke Elemente. Die reziproken Elemente in der Ebene sind hiermit auch charakterisiert.

Die hier vorgelegte Geometrie, auf deren Einzelheiten wir bei dieser Gelegenheit nicht näher eingehen, ist, wie sofort ersichtlich, mit der sogenannten Geometrie der Kurvenelemente n'ter Ordnung gleichbedeutend.

Durch Einführung von Polynomen mit zwei oder mehreren Unbestimmten (oder von anderen algebraischen Ringen mit Nullteilern) können in ähnlicher Weise andere Beispiele von Geometrien mit endlichvielen Elementen aufgestellt werden.

60. Bei den vorstehenden Entwickelungen haben wir die Voraussetzung gemacht, dass in unserer Ebene Punktepaare mit eindeutig bestimmter Verbindungsgerade existieren. Zum Schluss wollen wir aber auch mit wenigen Worten den Fall besprechen, wo es kein Punktepaar mit eindeutiger Verbindungsgerade gibt. Man kann dann in folgender Weise vorgehen. Wir wählen eine Strecke AB als Grundstrecke und betrachten zunächst einen ebenen Bereich $E(AB)$, den Eudoxischen Bereich der Grundstrecke, welcher aus allen denjenigen Punkten besteht, die durch wiederholte Abtragung der Grundstrecke vom Punkte A aus erreicht werden können. Für diesen Bereich gilt dann, dass die Punkte A, B eine eindeutige Verbindungsgerade haben, und die Geometrie des Bereichs lässt sich dann mit den vorstehend entwickelten Hilfsmitteln behandeln.

Indleveret til Selskabet den 19. Februar 1942.
Færdig fra Trykkeriet den 27. Maj 1942.